

Fundamentals of statistical and thermal physics

Federick Rief Professor of Physics University of California, Berkeley

제1장 통계적 방법

- ⊙ 고전역학 : 주어진 조건에서 개별 입자의 운동을 기술
- ⊙ 다입자계 연구 : 통계역학, 고에너지물리 영역 밖에서 가장 활발한 현대물리 연구 분야.(?!)
- 다입자계 : 기체, 액체, 고체, 전자기복사(photons), 플라스마
- 원자, 분자들로 이루어진 다 입자계. 양자역학의 세계
- 전자기력이 지배하는 세계 : 중력, 핵력 등은 고려의 대상이 아님
- ⊙ 다입자계의 기술에 고전역학은 적절한가?
- 입자의 성질과 입자간의 상호작용을 모두 알면 원칙적으로 가능
- 운동방정식은 시간반전($t \rightarrow -t$)에 대해 동일한 형태

$$F = m \frac{d^2}{dt^2} x = m \left(\frac{d}{-dt} \right)^2 x$$

- 다입자계에는 시간반전에 대해 대칭적이지 않은 현상이 무수히 많음
보기 : 기체의 확산, 옆질러진 물,....
- 또한 많은 입자가 특정한 규칙으로 계를 이룸으로써 전혀 예상치 못한 새로운 현상이 나타나기도 함
보기 : 특정분자의 결합은 성장, 분열의 생명현상을 일으킴
- 다입자계를 이해하고 기술하며 예측하는 새로운 물리법칙이 필요
- ⊙ 고전적 열역학(classical thermodynamics)
- 평형상태 : 거시적 변수(체적, 온도, 압력, 열전도도)들이 시간에 따라 변하지 않는 상태
- 거시적 변수간의 현상학적 관계
- 최소한의 가설로부터 법칙을 이끌어 냄
- 적용범위, 이해의 폭이 제한적
- ⊙ 통계역학
- 평형상태
- 계를 구성하는 입자들의 미시적 성질과 상호작용으로부터 법칙을 유도
- 열역학 법칙을 설명
- 이해의 폭과 범위를 확장
- ⊙ 열역학의 역사
- Rumford(1798)와 Davy(1799) : 열은 역학적 에너지의 한 형태임을 제안
- Mayer(1842) : 위의 제안을 과학적으로 논의
- Joule(1843-1849) : 위의 주장을 실험적으로 입증
- Carnot(1824) : 최초로 열기관을 분석
- Clausius and Kelvin(1850), Gibbs(1876-1878) : 열역학 이론을 창시하고 발전시킴
- ⊙ 거시적 문제에 대한 미시적 접근의 발전
- 희박한 기체에 대한 운동이론(kinetic theory)의 연구로부터
- Clausius, Maxwell, Boltzmann
- Maxwell(1859) : 기체분자의 속도분포
- Boltzmann(1872) : Boltzmann 방정식
- Chapman, Enskog(1916-1917) : 기체운동론의 현대적 형태를 완성

⊙ 통계역학

- Boltzmann(1872) : 기본적인 미시적 해석을 통해 비가역과정으로부터 평형상태로의 접근을 증명하여 통계역학을 더욱 일반적인 수준으로 끌어올림
- Gibbs((1902) : 통계역학 이론의 보편성과 강력함을 배가시킴
- 양자역학의 등장으로 양자통계역학으로 발전

1.1 통계의 기본 개념과 보기

Ensemble : 많은 수의 동일한 조건을 갖춘 계의 집합

보기 : 아주 여러 번 주사위 던지기 = 많은 수의 주사위를 한꺼번에 던지기(Ensemble)

멋대로 걷기(1차원)

l : 한 걸음의 거리

p : 오른쪽으로 갈 확률

$q(=1-p)$: 왼쪽으로 갈 확률

문제 : N 걸음 후 위치가 ml 일 확률은?

- 유사한 물리적 상황 : N 개의 원자의 스핀과 물체의 알짜 자기모멘트, 주어진 기체분자의 N 번 충돌후의 위치, N 개의 비 간섭성 광원에 의한 빛의 세기

1.2 1차원 멋대로 걷기

$$x = ml$$

$$-N \leq m \leq N$$

$P_N(m)$: N 걸음 후 입자의 위치가 ml 일 확률

n_1 : 오른쪽 걸음 횟수

n_2 : 왼 걸음 횟수

$$N = n_1 + n_2$$

$$m = n_1 - n_2 = n_1 - (N - n_1) = 2n_1 - N$$

$W_N(n_1)$: N 걸음에서 오른 걸음이 n_1 번일 확률

각각의 걸음이 독립적이면 각 시행의 확률은 곱해짐

(보충설명)

오른 걸음 다음 오른 걸음일 확률 = $p \cdot p = p^2$

한 걸음에서 오른 걸음이거나 왼 걸음일 확률 = $p + q$

$$W_N(n_1) \propto p^{n_1} q^{n_2}$$

$$N\text{번에서 } n_1\text{을 선택하는 방법의 수} = \frac{N!}{n_1!n_2!}$$

(보기) $N=3$

$$n_1 = 3, n_2 = 0\text{인 경우 ; } + + + = 1$$

$$n_1 = 2, n_2 = 1\text{인 경우 ; } \left. \begin{array}{c} + - + \\ + + - \\ - + + \end{array} \right) = 3$$

$$n_1 = 1, n_2 = 2\text{인 경우 ; } \left. \begin{array}{c} + - - \\ - + - \\ - - + \end{array} \right) = 3$$

$$n_1 = 0, n_2 = 3\text{인 경우 ; } - - - = 1$$

따라서 $W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$

$$(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (\text{binomial expansion})$$

$$P_N(m) = W_N(n_1)$$

$$n_1 = \frac{1}{2}(N+m), \quad n_2 = \frac{1}{2}(N-m) \text{ 이므로}$$

$$P_N(m) = \frac{N!}{[(N+m)/2]![(N-m)/2]!} p^{(N+m)/2} q^{(N-m)/2}$$

$$p = q = \frac{1}{2} \text{ 이면}$$

$$P_N(m) = \frac{N!}{[(N+m)/2]![(N-m)/2]!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

[Example]

- $p = q = \frac{1}{2}$ and $N = 3$

$$n_1 = 0, 1, 2, 3 \quad m = -3, -1, 1, \text{ or } 3$$

$$W_3(n_1) = P_3(m) = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$$

- $p = q = \frac{1}{2}$ and $N = 20$

$P_N(m)$: $m = 0$ 을 중심인 종 모양의 곡선, [Fig 1.2.3]

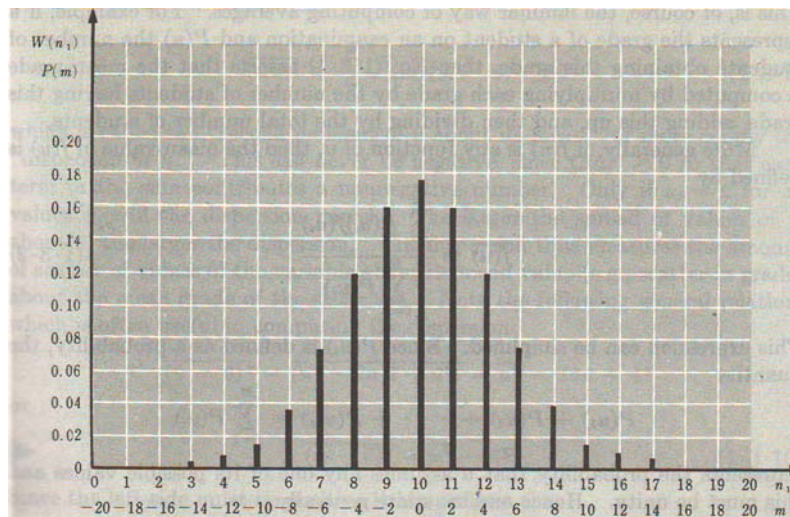


Fig. 1.2.3 Binomial probability distribution for $p = q = \frac{1}{2}$ when $N = 20$ steps. The graph shows the probability $W_N(n_1)$ of n_1 right steps, or equivalently the probability $P_N(m)$ of a net displacement of m units to the right.

nificance of this is obvious. After N random steps, the probability of the particle being a distance of N steps away from the origin is very small, while the probability of its being located in the vicinity of the origin is largest.

- N 이 매우 크면 : 원점에서 벗어날 확률은 매우 적고 원점 근방의 확률이 거의 대부분이다.

1.3 평균값

u : M개의 서로 다른 값을 갖는 변수 ($u_1, u_2, \dots, u_M$)

각 값을 가질 확률 : $P(u_1), P(u_2), \dots, P(u_M)$

$$\text{평균값 } \bar{u} \equiv \frac{\sum_{i=1}^M u_i P(u_i)}{\sum_{i=1}^M P(u_i)}$$

보다 일반적으로 $f = f(u_i)$ 일 때

$$\overline{f(u)} \equiv \frac{\sum_{i=1}^M P(u_i) f(u_i)}{\sum_{i=1}^M P(u_i)}$$

⊙ 확률의 규격화

$$\sum_{i=1}^M P(u_i) = 1 \quad : \text{normalization condition}$$

⊙ 평균

$$\overline{f(u)} = \sum_{i=1}^M P(u_i) f(u_i)$$

$$\overline{f(u) + g(u)} = \sum_{i=1}^M P(u_i) [f(u_i) + g(u_i)] = \sum_{i=1}^M P(u_i) f(u_i) + \sum_{i=1}^M P(u_i) g(u_i)$$

혹은

$$\overline{f(u) + g(u)} = \overline{f(u)} + \overline{g(u)}$$

$c = \text{const}$ 이면

$$\overline{cf(u)} = c \overline{f(u)}$$

⊙ 분산

$$\Delta u \equiv u - \bar{u}$$

$$\overline{\Delta u} = \overline{(u - \bar{u})} = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

▪ 평균에 대한 u 의 2차 모멘트(second moment of u about its mean)

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta u)^2} &= \overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{(u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2)} \\ &= \overline{u^2} - 2\bar{u}\bar{u} + \bar{u}^2 \\ &= \overline{u^2} - \bar{u}^2 \end{aligned}$$

☞ 변수가 평균값으로부터 벗어나는 정도의 척도

$$\overline{u^2} \geq \bar{u}^2$$

▪ 표준편차(standard deviation)

$$\sigma = \sqrt{\overline{(u - \bar{u})^2}} = \sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2}$$

1.4 멋대로 걷기의 평균

$$W(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}$$

규격화

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N W(n) &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= (p+q)^N = 1 \quad (\because p+q=1) \end{aligned}$$

⊙ n 의 평균값

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n W(n) = \sum_{n=0}^N n \cdot \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$np^n = p \frac{\partial}{\partial p} p^n$ 을 이용하여

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p \frac{\partial}{\partial p} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = pN \cdot (p+q)^{N-1} \\ &= pN \quad (\because p+q=1) \end{aligned}$$

$$\bar{n}_2 = Nq$$

$$m = n_1 - n_2$$

$$\bar{m} = \overline{n_1 - n_2} = \bar{n}_1 - \bar{n}_2 = N(p - q)$$

if $p = q$, then $\bar{m} = 0$

⊙ 분산의 계산

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2$$

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^N W(n) n^2 = \sum_{n=0}^N n^2 \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$n^2 p^n = p \frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial}{\partial p} p^n \right) = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 (p^n) \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{n^2} &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 p^n q^{N-n} \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 (p+q)^N \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) [pN(p+q)^{N-1}] \\ &= p[N(p+q)^{N-1} + pN(N-1)(p+q)^{N-2}] \end{aligned}$$

▪ $p+q=1$ 인 경우

$$\rightarrow \overline{n^2} = p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N$$

$$= p^2 N(N-1) + pN$$

$$\rightarrow \overline{(\Delta n)^2} = p^2 N^2 - p^2 N + pN - p^2 N^2$$

$$= Np(1-p) = Npq$$

$$\therefore \overline{(\Delta n)^2} = Npq \quad (1-4-9)$$

$$\Delta^* n = \left[\overline{(\Delta n)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad : \text{표준편차}$$

$$\frac{\Delta^* n}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{q}{p}} \quad : \text{분포의 상대적 폭(relative width of distribution)}$$

$$\frac{\Delta^* n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{for } p = q = \frac{1}{2}$$

☞ N 이 클수록 상대적인 편차는 감소

$\overline{(\Delta m)^2}$ 의 계산

$$m = 2n - N$$

$$\Delta m = m - \bar{m} = (2n - N) - (2\bar{n} - N)$$

$$= 2(n - \bar{n}) = 2\Delta n$$

$$\overline{(\Delta m)^2} = 4\overline{(\Delta n)^2} = 4Npq$$

$p = q = 1/2$ 이면

$$\overline{(\Delta m)^2} = N$$

[Example] $N = 100, p = q = \frac{1}{2}$

$$\bar{n} = 50, \bar{m} = 0, \left[\overline{(\Delta m)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 10$$

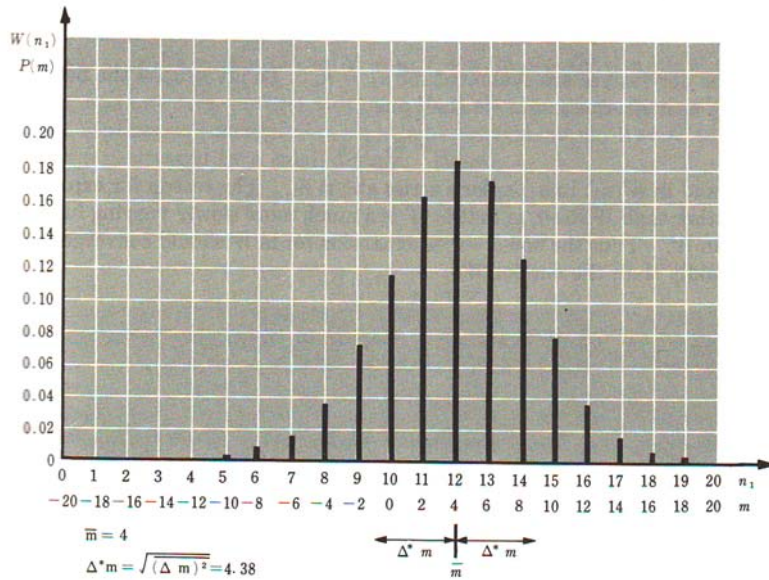


Fig. 1·4·1 Binomial probability distribution for $p = 0.6$ and $q = 0.4$, when $N = 20$ steps. The graph shows again the probability $W(n_1)$ of n_1 right steps, or equivalently, the probability $P(m)$ of a net displacement of m units to the right. The mean values $\bar{m}$ and $\overline{(\Delta m)^2}$ are also indicated.

1.5 N이 큰 경우의 확률분포

$\tilde{n}_1$: $W(n_1)$ 분포가 최대인 n_1 인 값

$\tilde{n}_1$ 근처에서 $W(n_1) \gg |W(n_1+1) - W(n_1)|$ 이면

→ W 는 연속변수 n_1 (연속 변수로 간주 가능)의 연속함수로 간주할 수 있다.

$n_1 = \tilde{n}$: W 가 최대인 위치의 조건은

$$\left. \frac{d}{dn_1} W \right|_{\tilde{n}_1} = 0 \quad \text{or} \quad \left. \frac{d}{dn_1} \ln W \right|_{\tilde{n}_1} = 0$$

☞ $\ln W$ 를 고려하는 이유 ; $\ln W$ 가 W 보다 느리게 변하는 함수이므로 맥급수전개에서 W 의 경우보다 적은 항의 고려만으로 충분하기 때문

Taylor 전개

$n_1 = \tilde{n}_1 + \eta$; $\tilde{n}_1$ 근처에서 η 에 대한 전개

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + B_1 \eta + \frac{1}{2} B_2 \eta^2 + \dots$$

$$\Rightarrow B_1 = \left. \frac{d}{dn_1} \ln W = \frac{1}{W} \frac{d}{dn_1} W \right|_{\tilde{n}_1} = 0 \quad ; \quad (\text{최대의 조건에 의해})$$

$$\Rightarrow B_2 = \left. \frac{d^2}{dn_1^2} \ln W(n_1) \right|_{\tilde{n}_1}$$

최대에서 $B_2 < 0$ 이므로

$$\ln W(n_1) \simeq \ln W(\tilde{n}_1) - \frac{1}{2} |B_2| \eta^2$$

$$W(n_1) \simeq W(\tilde{n}_1) e^{-\frac{1}{2} |B_2| \eta^2} = \tilde{W} e^{-\frac{1}{2} |B_2| \eta^2} \quad \text{Gaussian} \quad (1.5.7)$$

상수의 결정

※ $\tilde{n}_1$

$$W(n_1) = \frac{N!}{(N-n_1)!n_1!} p^{n_1} q^{N-n_1}$$

$$\ln W(n_1) = \ln N! - \ln n_1! - \ln (N-n_1)! + n_1 \ln p + (N-n_1) \ln q$$

if $n_1 \gg 1$ then $dn_1 = 1 \ll n_1$ thus n_1 의 변화는 연속적

$$\frac{d}{dn} \ln n! \simeq \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{1} = \ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n+1) \simeq \ln n$$

※ Stirling Formula

if $n \gg 1$ then $\ln n! \simeq n \ln n - n$

$$\frac{d}{dn} \ln n! \simeq \frac{d}{dn} (n \ln n - n) = \ln n + 1 - 1 = \ln n$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn_1} \ln W &= -\ln n_1 + \ln (N-n_1) + \ln p - \ln q \\ &= \ln \frac{(N-n_1)p}{n_1 q} \end{aligned}$$

$$\ln \frac{(N - \widetilde{n}_1)p}{\widetilde{n}_1 q} = 0 \quad \text{이므로}$$

$$\frac{(N - \widetilde{n}_1)p}{\widetilde{n}_1 q} = 1 \quad \rightarrow \quad Np - \widetilde{n}_1 p = \widetilde{n}_1 q$$

$$\widetilde{n}_1 = Np (= \overline{n}_1)$$

※ B_2

$$\frac{d}{dn_1} \ln W = -\ln n_1 + \ln(N - n_1) + \ln p - \ln q$$

$$B_2 = \frac{d^2}{dn_1^2} \ln W = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N - n_1}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{N - \widetilde{n}_1 + \widetilde{n}_1}{\widetilde{n}_1(N - \widetilde{n}_1)} = -\frac{N}{Np(N - Np)} \\ &= -\frac{1}{Npq} \end{aligned}$$

따라서 $W(n_1)$ 은

$$W(n_1) = \widetilde{W} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{Npq} \eta^2} \quad (\widetilde{W} = W(\widetilde{n}_1), \text{ i.e. } \eta = 0)$$

※ $\widetilde{W}$

W 의 규격화

$$\sum_{n_1}^N W(n_1) = 1$$

W 가 $\widetilde{n}_1$ 근처에서만 유한한 값을 갖고 이외의 값에서는 0이라면

$$\sum_{n_1=0}^N W(n_1) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} W(\widetilde{n}_1 + \eta) d\eta$$

☞ $\eta \rightarrow \pm \infty$ 는 실질적인 기여가 없음

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{W} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{Npq} \eta^2} d\eta \\ &= \widetilde{W} \sqrt{2\pi Npq} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \widetilde{W} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}$$

결과적으로

$$\begin{aligned} W(n_1) &= (2\pi Npq)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(n_1 - Np)^2}{2Npq} \right] \\ &= [2\pi(\Delta n_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(n_1 - \overline{n}_1)^2}{2(\Delta n_1)^2} \right] \end{aligned}$$

1.6 가우스 확률분포

$$P(m) = W\left(\frac{N+m}{2}\right) = (2\pi Npq)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{[m - N(p-q)]^2}{8Npq}\right\} \quad (1.6.1)$$

$$\begin{aligned} n_1 - Np &= \frac{1}{2}[N+m] - Np = \frac{1}{2}[m + N - 2Np] \\ &= \frac{1}{2}[m + N(q-p)] \end{aligned}$$

$$m = 2n_1 - N \quad \text{이므로} \quad \Delta m = 2\Delta n_1 = 2$$

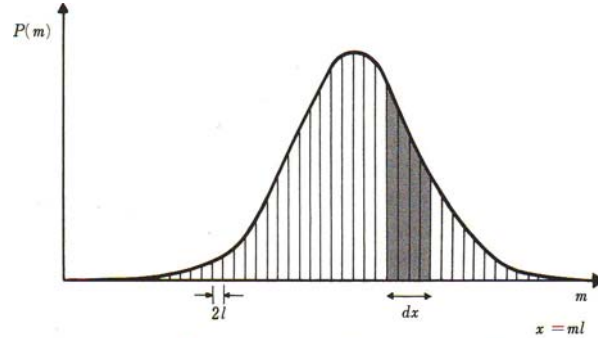


Fig. 1.6.1 The probability $P(m)$ of a net displacement of m units when the total number N of steps is very large and the step length l is very small.

※확률의 위치 x 에 대한 함수

$$x = ml$$

☞ m 이 매우 크면 $\Delta x = 2l$ 은 매우 작으므로 x 를 연속변수로 간주할 수 있음

☞ 고체내의 원자의 확산 : $l \sim 10^{-8}\text{cm}$

☞ 실험실 측정의 거시적 scale : $\sim 1\mu\text{m} = 10^{-4}\text{cm}$

N 걸음 후 입자의 위치가 $x \sim x + dx$ 에 있을 확률은?

dx 구간에 있는 m 의 가지수 ; $dx/2l$ ($2l = \Delta m$)

dx 가 크지 않으면 dx 구간에 있을 확률은 $p(m)$ 으로 근사 가능

따라서 $x \sim dx$ 구간에 입자가 있을 확률 $\sim p(m)\frac{dx}{2l}$; dx 에 비례

$$\mathcal{P}(x)dx \equiv p(m)\frac{dx}{2l}$$

☞ $\mathcal{P}(x)$; 확률밀도 ($\mathcal{P}(x)dx$ 가 확률이므로 $\mathcal{P}(x)$ 의 단위는 $(dx)^{-1}$)

확률밀도

식(1.6.1)을 x 의 함수로 쓰면

$$\mathcal{P}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \quad ; \quad \mathcal{P}(x) \text{는 가우스형태의 확률분포}$$

$$\mu \equiv (p-q)Nl$$

$$\sigma \equiv 2\sqrt{Npq}l$$

규격화

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{2\sigma^2\pi} = 1 \end{aligned}$$

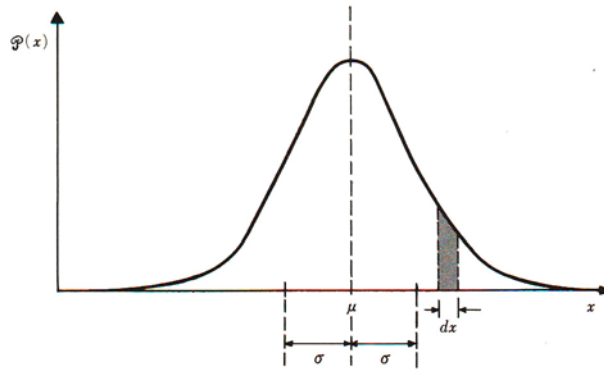


Fig. 1·6·2 The Gaussian distribution. Here $\mathcal{P}(x) dx$ is the area under the curve in the interval between x and $x + dx$ and is thus the probability that the variable x lies in this range.

x 의 평균값

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{P}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \quad (y = x - \mu \rightarrow dx = dy) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (y + \mu) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \mu = N(p - q)\end{aligned}$$

분산

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta x^2)} &= \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \mu^2 \\ \overline{(x - \mu)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int (x - \mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\sigma^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \sigma^2 = 4N^2 pq \\ \overline{(\Delta x)^2} &= \overline{(x - \mu)^2} = \sigma^2 \\ \Rightarrow \bar{x} &= (p - q)N \\ \Rightarrow \overline{(\Delta x)^2} &= 4Npq\ell^2\end{aligned}$$

1.7 다변수의 확률분포

2변수의 경우

$$u_i (i = 1, \dots, M), \quad v_j (j = 1, \dots, N)$$

$$P(u_i, v_j) ; u = u_i, v = v_j \text{ 일 확률}$$

$$\text{규격화} ; \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N P(u_i, v_j) = 1$$

$$P_u(u_i) = \sum_{j=1}^N P(u_i, v_j)$$

$$P_v(v_j) = \sum_{i=1}^M P(u_i, v_j)$$

$$\sum_{i=1}^M P_u(u_i) = \sum_{i=1}^M \left[\sum_{j=1}^N P(u_i, v_j) \right] = 1$$

확률적 독립

u 와 v 가 서로에게 영향을 미치지 않는 경우
(u_i 가 어떤 값을 갖는가가 v_j 와 상관이 없음)

두 변수가 독립일 때

$$P(u_i, v_j) = P_u(u_i)P_v(v_j)$$

<평균값>

$$\overline{F(u, v)} = \sum_j \sum_i F(u_i, v_j) P(u_i, v_j)$$

$$\overline{f(u)} = \sum_i \sum_j P(u_i, v_j) f(u_i) = \sum_i f(u_i) P_u(u_i)$$

$$\overline{F+G} = \overline{F} + \overline{G}$$

$$\begin{aligned} \overline{f(u)g(v)} &= \sum_i \sum_j f(u_i)g(v_j) P_u(u_i)P_v(v_j) \\ &= \overline{f(u)} \overline{g(v)} \end{aligned}$$

1.8 연속확률분포에 대한 제언

u ; 구간 $a_1 < u < a_2$ 에서의 연속변수

변수가 $u \sim u + du$ 에 있을 확률

du ; 매우 작으나 크기가 정해지지 않으면, 확률 $\propto du$
 $\rightarrow$ 확률 = $\mathcal{P}(u)du$; $\mathcal{P}(u)$ 는 확률밀도

불연속 변수로 기술

구간 $a_1 < u < a_2$ 를 매우 작은 등간격 δu 로 분할 ($\delta u \ll du$)

각각의 구간에서 u 값에 번호를 매겨 u_i 로 표시

$$u_{i+1} - u_i = \delta u$$

$P(u_i)$; 변수가 $u_i \sim u_i + \delta u$ 에 있을 확률

$$P(u) = \mathcal{P}(u)\delta u$$

$$\sum_i P(u_i) = 1$$

$\mathcal{P}(u)du$; 변수가 $u \sim u + du$ 에 있을 확률

$$\text{규격화 조건} \quad \int_{a_1}^{a_2} \mathcal{P}(u)du = 1$$

⊙ 함수의 평균

$f(u)$; u 의 연속함수

함수 $u \sim u + du$ 구간의 평균값 기여분 = $f(u)\mathcal{P}(u)du$

함수 전체의 구간 평균값 $\overline{f(u)} = \int_{a_1}^{a_2} f(u)\mathcal{P}(u)du$

다변수일 때 (편의상 2 변수 고려)

$\mathcal{P}(u, v)dudv$; 변수가 $u \sim u + du, v \sim v + dv$ 일 확률

규격화

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \mathcal{P}(u,v) du dv = 1 \quad (a_1 < u < a_2, \quad b_1 < v < b_2)$$

함수 $F(u,v)$ 의 평균

$$\overline{F(u,v)} = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} du dv F(u,v) \mathcal{P}(u,v)$$

◎ 변수의 변환

$\phi(u)$; u 의 연속 함수

문제 : $\mathcal{P}(u)du$ 가 $u \sim u+du$ 일 확률일 때 이에 대응되는 ϕ 가
 $\phi \sim \phi+d\phi$ 일 확률 $W(\phi)d\phi$ 는 $\mathcal{P}(u)du$ 와 어떤 관계인가?

$W(\phi)d\phi$; $\phi \sim \phi+d\phi$ 값을 갖는 $\mathcal{P}(u)du$ 의 합

$$\begin{aligned} W(\phi)d\phi &= \int_{\phi}^{\phi+d\phi} \mathcal{P}(u) du \\ &= \int_{\phi}^{\phi+d\phi} \mathcal{P}(u) \left| \frac{du}{d\phi} \right| d\phi \\ &= \mathcal{P}(u) \left| \frac{du}{d\phi} \right| d\phi \end{aligned}$$

☞ 주어진 ϕ 에 대해 $u(\phi)$ 는 유일한 값을 가짐을 가정

아닐 경우

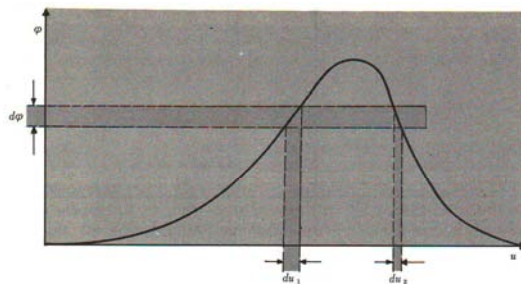


Fig. 1.8.3 Illustration showing a function $u(\phi)$ which is such that $u(\phi)$ is a double-valued function of ϕ . Here the range $d\phi$ corresponds to u being either in the range du_1 or in the range du_2 .

1.9 멋대로 걷기 평균값의 일반적 계산

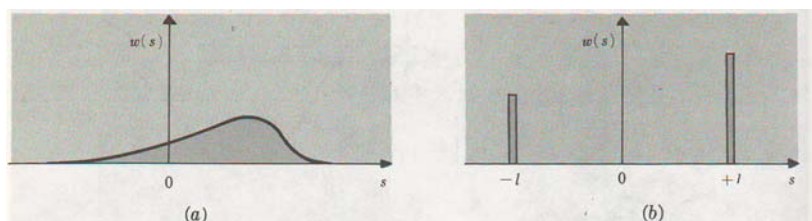


Fig. 1.9.1 Some examples of probability distributions giving, for any one step, the probability $w(s) ds$ that the displacement is between s and $s+ds$. (a) A rather general case, displacements to the right being more probable than those to the left. (b) The special case discussed in Sec. 1.2. Here the peaks, centered about $+l$ and $-l$, respectively, are very narrow; the area under the right peak is p , that under the left one is q . (The curves (a) and (b) are not drawn to the same scale; the total area under each should be unity.)

s_i ; i 번째 걸음의 변위(양수 혹은 음수)

$w(s_i)ds_i$; i 번째 걸음에서 변위가 $s_i \sim s_i+ds_i$ 일 확률, 보폭이 일정하지 않음

가정 ; 1. 각 걸음의 확률은 독립

2. 모든 걸음에서 w 는 동일한 값

$\mathcal{P}(x)dx$; N 걸음 후 위치가 $x \sim x + dx$ 일 확률

$\mathcal{P}(x)$ 의 형태는?

$\bar{x}$ 는?

$\overline{(\Delta x)^2}$ 는?

▪ $\bar{x}$ 의 표현

$$x = s_1 + s_2 + \cdots + s_N = \sum_{i=1}^N s_i$$

$$\bar{x} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \cdots + \bar{s}_N = \sum_{i=1}^N \bar{s}_i$$

$$\bar{s}_i = \int s_i w(s_i) ds_i ; w(s_i) \text{는 모든 } s_i \text{에 대해 동일하므로}$$

$$\bar{s}_i = \int s w(s) ds \equiv \bar{s}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = N\bar{s}$$

▪ $\overline{(\Delta x)^2}$ 의 표현

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - \bar{x} = \sum_i s_i - \sum_i \bar{s}_i = \sum_i (s_i - \bar{s}) \\ &= \sum_i \Delta s_i \quad (\Delta s_i \equiv s_i - \bar{s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \left(\sum_i \Delta s_i \right) \left(\sum_j \Delta s_j \right) \\ &= \sum_i (\Delta s_i)^2 + \sum_{i \neq j} \Delta s_i \Delta s_j \end{aligned}$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = \sum_i \overline{(\Delta s_i)^2} + \sum_{i \neq j} \overline{\Delta s_i \Delta s_j}$$

각각의 걸음은 독립적이므로 $i \neq j$ 이면

$$\overline{\Delta s_i \Delta s_j} = \overline{\Delta s_i} \overline{\Delta s_j} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{\Delta s_i} = \bar{s}_i - \bar{s} = 0$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = \sum_i \overline{(\Delta s_i)^2}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta s_i)^2} &= \int ds_i w(s_i) (s_i - \bar{s})^2 \\ &= \int ds w(s) (s - \bar{s})^2 \equiv \overline{(\Delta s)^2} \quad (\Delta s = s - \bar{s}) \end{aligned}$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = N \overline{(\Delta s)^2} \quad (\text{분산})$$

$$\Delta^* x = [\overline{(\Delta x)^2}]^{\frac{1}{2}} \propto \sqrt{N} \quad (\text{표준편차})$$

$$\bar{x} \propto N$$

$\Leftrightarrow N$ 이 증가하면 $\Delta^* x$, $\bar{x}$ 모두 증가하지만
상대적인 표준편차 $\Delta^* x / \bar{x} \propto N^{1/2}$ 이 되어

$\Leftrightarrow N$ 이 매우 크면 x 의 분포가 $\bar{x}$ 로부터 벗어나는 정도는 아주 작아진다

$\Leftrightarrow$ 큰 분포를 포함하는 통계적 분포의 전형적 특징

1.10* 확률분포의 계산

N 걸음 후 위치가 $x \sim x + dx$ 일 확률 $\mathcal{P}(x)dx$ 구하기

$w(s_i)ds_i$; N 번째 걸음에서 변위가 $s_i \sim s_i ds_i$ 일 확률

N 번 시행할 때, 각각의 걸음은 독립이므로

$$\mathcal{P}(x)dx \propto w(s_1)ds_1 w(s_2)ds_2 \cdots w(s_N)ds_N$$

위치 $x \sim x + dx$ 가 되는 $\sum_i s_i$ 의 경우를 모두 고려해야 하므로

$$\mathcal{P}(x)dx = \int \cdots \int_{dx} ds_1 w(s_1) ds_2 w(s_2) \cdots ds_N w(s_N) \quad (1.10.2)$$

$$x < \sum_i s_i < x + dx \quad (1.10.3)$$

식(1.10.3)을 만족하는 경우를 모두 구하는 것은 어려운 문제

※ Dirac delta 함수의 도입

$$\delta(x - x_0)dx = 1 \text{ 이면}$$

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} (dx)^{-1} & (x_0 - \frac{1}{2}dx < x < x_0 + \frac{1}{2}dx) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\mathcal{P}(x)dx = \int \cdots \int ds_1 \cdots ds_N w(s_1) \cdots w(s_N) \delta(x - \sum_i s_i) dx \quad (1.10.4)$$

☞ 식(1.10.3)을 만족하는 s_i 의 경우를 찾을 필요가 없음

$$\delta(x - \sum_i s_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(\sum_i s_i - x)k} \quad ; \text{식(1.10.4)에 대입}$$

$$\text{☞ 수리물리교재 } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \int \int \cdots \int \Pi_i ds_i w(s_i) \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(s_1 + \cdots + s_N - x)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} \int ds_1 e^{iks_1} w(s_1) \cdots \int ds_N e^{iks_N} w(s_N) \end{aligned}$$

$$Q(k) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{iks} w(s) \quad (1.10.7)$$

☞ 모든 s_i 에 대해 $w(s_i)$ 는 동일하다는 가정

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} Q^N(k)$$

(보기) 몇대로 걸기 ; $w(s)$, $Q(k)$, $\mathcal{P}(x)$ 의 계산

l : 한 걸음 거리, p : 오른 걸음 확률, q : 왼 걸음 확률

$$w(s) = p\delta(s - l) + q\delta(s + l)$$

$$\begin{aligned} Q(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{iks} [p\delta(s - l) + q\delta(s + l)] \\ &= pe^{ikl} + qe^{-ikl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^N(k) &= (pe^{ikl} + qe^{-ikl})^N \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} (pe^{ikl})^n \cdot (qe^{-ikl})^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} e^{ikl(2n-N)} \\
\mathcal{P}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ikx} \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} e^{ikl(2n-N)} \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \delta[l(2n-N) - x] \\
\mathcal{P}(x) &= 0 \quad \text{when} \quad x \neq (2n-N)l, \quad \text{where } n=0,1,2,\dots,N
\end{aligned}$$

▪ 확률 $P(2n-N)$

$$P(2n-N) = \int_{(2n-N)l-\epsilon}^{(2n-N)l+\epsilon} \mathcal{P}(x) dx = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

1.11* N이 클 때의 확률분포

식(1.10.7)의 e^{iks} ; k 가 큰 값일수록 s 에 대해 빠르게 진동

Q^N 에서 N 이 증가할 수록 $Q^N(k)$ 는 큰 k 값에 대해 빠르게 감소
(보충설명)

$$Q(k) = \int ds e^{iks} w(s) ; a < s < b \text{에서 } w(s) \text{는 완만히 변화}$$

$$Q(k) = \int_a^b ds e^{iks} w(s) \approx w(a) \int ds e^{iks}$$

k 가 큰 값이면 e^{iks} 는 빠르게 진동하므로 $\frac{1}{k} \ll |b-a|$ 이면

$$\int ds e^{iks} \simeq 0 \quad (\text{설명 끝})$$

k 가 큰 값 영역의 기여도가 작으므로 주된 기여는 작은 k 영역이 담당
Taylor 전개

$$\begin{aligned}
Q(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds w(s) e^{iks} = \int_{-\infty}^{\infty} ds w(s) (1 + iks - \frac{1}{2} k^2 s^2 + \dots) \\
&= 1 + i\bar{s}k - \frac{1}{2} k^2 \overline{s^2} + \dots
\end{aligned}$$

$$\overline{s^n} = \int ds w(s) s^n$$

$$\begin{aligned}
\ln Q^N(k) &= N \ln Q(k) = N \ln [1 + i\bar{s}k - \frac{1}{2} \overline{s^2} k^2 + \dots] \\
&= N [i\bar{s}k - \frac{1}{2} \overline{s^2} k^2 - \frac{1}{2} (i\bar{s}k)^2 + \dots] \\
&= N [i\bar{s}k - \frac{1}{2} k^2 (\overline{s^2} - \bar{s}^2) + \dots] \\
&= N [i\bar{s}k - \frac{1}{2} \overline{(\Delta s)^2} k^2 + \dots]
\end{aligned}$$

$$Q^N(k) \simeq e^{iN\bar{s}k - \frac{1}{2} N \overline{(\Delta s)^2} k^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} Q^N(k) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(N\bar{s}-x) - \frac{1}{2}N\overline{(\Delta s)^2}k^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}
\end{aligned}$$

$$\mu \equiv N\bar{s}, \quad \sigma^2 \equiv N\overline{(\Delta s)^2}$$

$w(s)$ 가 어떤 꼴이든

- ① 각 걸음이 독립이고 ② s 가 증가하면 $w(s)$ 는 충분히 빠르게 감소하며
- ③ N 이 매우 큰 수이면 확률분포는 Gaussian으로 주어짐
- ④ 자연에서 다입자로 이루어진 무수히 많은 현상은 Gaussian distribution을 따름

$$\bar{x} = \int \mathcal{P}(x) \cdot x dx = \mu$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = \int \mathcal{P}(x)(x^2 - \bar{x}^2) dx = \sigma^2$$